1.- FUNCIONES REALES DE DOS Y TRES VARIABLES REALES

Funciones reales de dos variables reales independientes

A) DOMINIO E IMAGEN

1. Determine el conjunto de puntos donde la función es positiva y negativa:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y}{x^4+y^2}$$

---

2. Determine y , grafique el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

b) $\mathrm{f(x,\ y)}=\sqrt{(x-2y)(x+y)}$

c) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x.y}{4-x^2-y^2}}$

d) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$

e) $f(x,y)=arc\,sen\left(x^2+y^2-3\right)$

f) $f(x,y)=+\sqrt{sen\left(x^2+y^2\right)}$

Funciones reales de tres variables reales independientes

g) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{z-x^2-y^2}$

h) $f(x,y,z)=\sqrt{4+x^2-4y^2-z^2}$

i) $f(x,y,z)=\ln\left(36-36x^2-9y^2-4z^2\right)$

B) REPRESENTACIÓN GRÁFICA - TRAZAS, CURVAS DE NIVEL

3. Determine las ecuaciones de las trazas y curvas de nivel de las siguientes funciones, grafique tres curvas de nivel e identifique las superficies:

a) $z + 3y + 2x = 12$

b) $z = 4 - x^2 - y^2$

c) $z^2 = 1 - x^2 - 4y^2$

d) $z = y^2 - 2$

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

f) $z = x^2 - y^2$

g) $9\dfrac{x^2}{4} + 9\dfrac{z^2}{4} - y^2 = 1$

2.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA - SUPERFICIES DE NIVEL

4. Determine la expresión de la familia de superficies de nivel, grafique una de ellas aplicando trazas, e identifique las superficies

a) $u = x^2 + y^2 + z^2$

b) $u = z^2 - x^2 - y^2$

c) $u = x^2 + z^2 - 16$

B) PROBLEMAS DE APLICACIÓN

5. La siguiente función representa el potencial eléctrico de un punto (x, y) del plano˙ Las curvas de nivel de dicha función se denominan curvas equipotenciales debido a que el potencial eléctrico de todos los puntos sobre dicha curva es el mismo. Grafique dos curvas equipotenciales.

$$V(x, y) = \frac{C}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

---

6. La siguiente función representa la temperatura en un punto (x, y) de una placa rectangular con el origen de coordenadas ubicado en el centro de la misma. Encuentre la ecuación de las isotermas correspondientes y grafique:

$$T(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad T = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$$

3.- LÍMITE Y CONTINUIDAD

7. Analice los siguientes límites en el origen, ó en los puntos indicados, mediante límites direccionales, reiterados o usando coordenadas polares, a fin de determinar su existencia:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{y^4 + x^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3sen\,(x.y)}{x}$

d) $z = \frac{x^3 + x\,y^2}{x^2 + y^2}$ en P(0,0)

e) $z = \frac{2x^2 - y^2}{2x^2 + y^2}$ e n P0,0)

f) $z = \frac{2(x-1)\,y^4}{(x-1)^5 + 6y^5}$ en P1,0)

---

8. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & si\ (x+y) \neq 0 \\ 0 & si\ (x+y) = 0 \end{cases}\quad en\ P(0,0)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{x} + 5\mathrm{y} & si\quad \mathrm{x} > \mathrm{y}^2 \\ x^2 & si\quad \mathrm{x} \leq \mathrm{y}^2 \end{cases}\ en\ P(0,0)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{sen(x+y)} & si\quad (x+y) \neq k\pi \\ 0 & si\quad (x+y) = k\pi, k \in Z \end{cases}\quad en\ P(0,0)$

PROBLEMA DE APLICACIÓN

9. Se lanza al mercado un nuevo lubricante. El volumen de ventas mensuales (y) se expresa en función del tiempo (t) medido en meses y de la cantidad invertida en publicidad (x) por mes medida en pesos como:

$$y = 4000(1 - e^{-0,003x})(1 - e^{-t})$$

a) Analice que ocurrirá con el volumen de ventas cuando la cantidad invertida en publicidad y el tiempo tiendan a cero.
b) Indique que ocurre con el volumen de ventas a largo plazo (suponga t tendiendo a infinito)
c) Considerando la situación del punto b)es conveniente aumentar mucho el gasto en publicidad x?

4.- DERIVADAS PARCIALES

A) CALCULO APLICANDO REGLAS DE DERIVACION

10. Halle las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación en los puntos indicados.

a) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^2}{x}$ en $P(2,0)$

b) $f(x,y)=e^x\ln(x+y)$ en $P(0,1)$

c) $f(x,y)=tg(yx)e^{x^2}+\dfrac{\mathrm{x-y}}{\mathrm{x+y}}$ en $P(1,1)$

d) $f(x,y)=xe^{-y}+3y^x$

e) $f(x,y)=e^x\sqrt{seny^2}+x$ en $P\left(0,\sqrt{\pi/6}\right)$

f) $f(x,y)=\ln[\sec(xy)+tg(xy)]$

g) $f(u,v)=arctg\left(\dfrac{u}{v}\right)$

h) $f(r,\sigma)=(sen\sigma)^{r^3}$

---

11. Halle las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

a) $f(x,y,z)=z\ arc\ sen\ \left(\frac{x}{y}\right)$

b) $f(x,\theta,z)=\left(\dfrac{2r\ sen\theta-tg2\theta}{r^2+z^2}\right)$

c) $v=\cos(2x+y-3z)$ en $P(1,2,3)$

B) INTERPRETACION GEOMETRICA

13. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva obtenida al seccionar la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 2$ en el punto (3, 2, 13).

---

14. Halle la ecuación de la recta tangente a la superficie $36\,z = 4\,x^2 + 9\,y^2$ en el punto $P\,(3, -2, 2)$, que cumpla las siguientes condiciones:

a) Paralela al plano xz

b) Paralela al plano yz

c) Paralela al plano xy

C) PROBLEMAS DE APLICACIÓN

15. El volumen de un gas está relacionado con su presión P y con su temperatura T mediante la ley PV = RT donde R es constante y T = 200 ºC. Determine la razón de cambio de la presión con respecto al volumen si tiene el valor de V = 50 cm3.

---

16. En un día de frio una persona puede sentir más frio cuando hay viento que cuando no lo hay ya que la pérdida de calor es función de la temperatura y de la velocidad del viento de acuerdo a la ecuación:

$$H = (10.45 + 10\sqrt{w} - w)(33 - t)$$

Donde H es la pérdida de calor, t es la temperatura del aire y w es la velocidad del viento.

a) Evalue H para t=0 y w=4

b) Evalue $\frac{\partial H}{\partial w}$ y $\frac{\partial H}{\partial t}$ para t=0 y w=4

D) DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR - TEOREMA DE CLAIRAUT - SCHWARZ

17. Compruebe la igualdad de las derivadas cruzadas para $f(x, y) = e^x \ln(x + y) \quad en \quad P\,(0,1)$

---

18. Si $z = x^2 - 5xy^3$ halle Z_{xyyx} ; Z_{xyx}

E) TEOREMA DE LA APROXIMACION LINEAL – DIFERENCIABILIDAD - DIFERENCIAL TOTAL

19. Dada la función $z = x^2 + y^2 - xy$

a) Halle el incremento de la función en $P(1,1)$ al pasar a $Q(1{,}25;0{,}8)$

b) Halle el diferencial total en $P(1,1)$

c) Halle la aproximación lineal de la función en $P(1,1)$

---

20. Dada la función $f(x,y)=x^{y}+y^{x}$ y el punto $P(1,1)$, exprese el diferencial de primer y segundo orden en dicho punto

---

21. Calcule el diferencial de primer orden de:

a) $z=x^{2}\ y^{6}$

b) $w(x,y,z)=x^{4}\sec(yz)$

F) PROBLEMAS DE APLICACIÓN

22. Cuando se conectan dos resistencias R1 y R2 en paralelo, la resistencia equivalente viene dada por $R=\dfrac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}$ Si el valor real de R1 es de 300 ohmios, con un error del 2 % y el de R2 es de 500 ohmios, con un error del 3 %, halle el error de R.

---

23. Acotar el error cometido en la medición del volumen de un elipsoide de revolución $V=\dfrac{4}{3}\pi a^{2}b$ sabiendo que a = 4 m medido con un error $|\Delta a|\le 2cm$ y b=7m medido con un error $|\Delta b|\le 4cm$

G) PLANO TANGENTE –RECTA NORMAL (ecuación de la superficie dada en forma explícita)

24. Determine las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a las superficies:

a) $f(x,y)=x^{3}+8\,y^{3}$ en el punto (-2,1)

b) $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ en el punto (2,0)

---

5. - DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA - REGLA DE LA CADENA – DIFERENCIACION IMPLICITA - DERIVADA DIRECCIONAL – VECTOR GRADIENTE

A) DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA – REGLA DE LA CADENA

25. Sea $z=f(x,y)$ tal que:

a) $\begin{cases} f(x,y)=e^{xy} \\ x=\dfrac{4}{2t+1} \\ y=3t+5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(u,v,w)=u^2 - v + \dfrac{w}{2} \\ u=x^2-y \\ v=2\dfrac{x}{y^2}; \qquad w=\ln y \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x,y)=3x^2+\cos(y^3) \\ x=2uv \\ y=uv \end{cases}$ d) $\begin{cases} z=r\ln t+t^2 \\ r=x-y \\ t=e^{3x} \end{cases}$

- ✓ Identifique las variables intermedias y las independientes, efectúe el diagrama correspondiente y calcule las derivadas aplicando la **Regla de la Cadena**
- ✓ Exprese $f(x,y)=g(t)$ y calcule para verificar sus resultado, y obtenga el valor de la derivada en **t =0** para el ejercicio a)

---

26. Demuestre que una función F(t) con $t=\dfrac{y}{x^2-y^2}$ satisface la ecuación

$$\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}+2xy\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

B) PROBLEMAS DE APLICACIÓN

27. El lado x del triángulo ABC aumenta a razón de 0.3 cm/ s, el lado y aumenta a razón de 0.5 cm/s, el ángulo comprendido entre ambos crece a una razón de 0.1 rad/s. Encuentre la razón de cambio del área del triángulo en el instante en el que x = 10 cm, y = 8 cm y el ángulo es $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

---

28. La presión P (en kilo pascales), el volumen V (en litros), y la temperatura T (en kelvin) de un mol de un gas ideal están relacionados mediante la ecuación PV= 8,31 T. Calcule la razón de cambio de la presión en el tiempo cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0,1K/s, y el volumen es de 100 L y aumenta a razón de 0,21L/s

---

C) DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

29. Si $f(x,y)=0$ define implícitamente a y como función diferenciable de x, calcule $\dfrac{dy}{dx}$

a) $x^3-2x^2y^2+y=1$ b) $x+2y^2=e^y$

---

30. Si $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a z como función diferenciable de x y de y, calcule las derivadas parciales de $z=f(x,y)$ y verifique en los puntos

a) $x^2+y^2+z^2=1$ en P(1,1,1) y en P(0,-1,0)

b) $xyz+\ln(xyz)-z=0$ en P(1,1,1) y en P(2,1/2;1)

---

31. Si $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a cada una de las variables x, y, z como funciones de las otras dos: $z=f(x,y)$ ó $y=f(x,z)$ ó $x=f(y,z)$ y F es diferenciable y ninguna de las derivadas parciales Fx ; Fy ; Fz es cero demuestre que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z}=-1$$

D) PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE (ecuación de la superficie dada en forma implícita)

32. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2-y\ln z=0$ en $P(2;4;e)$

---

33. Muestre que las superficies $x^2+4y+z^2=0$ y $x^2+y^2+z^2-6z+7=0$ son tangentes entre sí en el punto (0,-1,2). Escriba la ecuación del plano tangente.

E) DERIVADA DIRECCIONAL – GRADIENTE

34. Calcule la derivada direccional en el punto de las siguientes funciones:

a) $\begin{cases} f(x,y)=x^2+2xy+3y^2 \;\; en \;\; P(-1,1) \\ \bar{u}=i-j \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x,y,z)=x^2y^3z^2 \qquad \text{P(1,-1,2)} \\ \bar{u}=\langle 1,-1,2\rangle \end{cases}$

---

35. Calcule las siguientes derivadas direccionales de la función $f(x,y)=x^2y^3-4y$ en el punto P(-2,1)

a) En la dirección que va de P a Q(3,2)

b) En la dirección del vector $\bar{v}=\langle 2,-1\rangle$

c) En la dirección de un ángulo $\alpha=\frac{3}{4}\pi$

---

36. ¿En qué dirección la función $f(x,y)=xy.e^{x-y}$ aumenta más rápidamente en el punto $P(5,5)$

---

37. Suponga que $\nabla f(a,b)=(-4;3)$. Halle un vector unitario u de manera que:

a) $D_u\ f(a\,;b)=0$

b) $D_u\ f(a\,;b)$ sea mínima.

c) $D_u\ f(a\,;b)$ sea máxima

---

38. Dada $f(x,y)=x^3-3x^2y+3y^2x$ y el punto $P(1,2)$

a) Halle la derivada direccional de f en P en la dirección que une P con Q (3,1)

b) Halle la derivada de f en P en la dirección que forma un ángulo $\theta=\pi/6$ con el eje x

c) Determine el valor y la dirección en que la derivada direccional es máxima en P

---

39. Dada $f(x,y)=2x^2y-5xy$ y el punto $P(-1,4)$ determine qué ángulo forma con el eje x el vector v en cuya dirección la derivada de f es nula en dicho punto.

F) PROBLEMAS DE APLICACIÓN

40. Suponga que está escalando una montaña cuya forma está dada por la ecuación $z=1000-0.01x^2-0.02y^2$ y usted está ubicado en el punto de coordenadas (60, 100, 764):

a) ¿Qué dirección debe tomar al inicio para alcanzar la cima con mayor rapidez?

b) Si asciende en esa dirección ¿a qué ángulo con respecto al horizonte ascenderá al inicio del camino?

---

41. La temperatura de una bola con centro en el origen es $T(x,y,z)=100e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. Observe que la bola está más caliente en el origen (su centro). Demuestre que la dirección de máxima disminución es la de un vector que pasa por el origen y su sentido es tal que apunta en dirección opuesta al mismo.

---

6. – EXTREMOS DE FUNCIONES LIBRES Y CONDICIONADOS

A) SERIE DE TAYLOR

42. Desarrolle la fórmula de Taylor hasta los términos de segundo grado para calcular valores de la función $f(x,y)=\ln(x+y)$ en las cercanías del punto (2, -1). Calcule el valor aproximado de f(2.02,-0.98).

B) EXTREMOS LIBRES

43. Encuentre para las siguientes funciones los puntos donde las derivadas primeras se anulan

a) $z = xy + 5$

b) $z = x^2 + 4x + y^3$

---

44. Dada la función $f(x,y) = y^2 - x^2$ pruebe que el origen es un punto crítico y que no es un extremo relativo de la función, represente la superficie

---

45. Encuentre y clasifique los extremos relativos de las funciones y calcule el valor de la función en dichos puntos

a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2$

b) $g(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y + 5$

c) $f(x,y) = \left(x^3 + y^3\right)e^{-x}$

d) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

e) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$

C) EXTREMOS CONDICIONADOS - MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

46. Utilice el Método de los Multiplicadores de Lagrange para hallar los puntos críticos de la función, sujeta a la restricción dada

a) $\begin{cases} f(x,y) = x^2y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u(x,y) = xy - 3y^2 \\ 10x + 15y = 180 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x;y;z) = x^4 + y^4 + z^4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

---

47. Dado el problema

$$\begin{cases} f(x,y) = x + 2y \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

a) Grafique la restricción y algunas curvas de nivel de la función objetivo.
b) Dé una estimación de las coordenadas de los posibles puntos críticos
c) Resuelva el problema por método general y compruebe con su respuesta en b)
d) ¿Cómo resultan los vectores gradientes de la función objetivo y de la restricción en el punto encontrado?

---

48. Minimice $f(x,y) = x^2 - y^2$ bajo la condición $x - 2y + 6 = 0$

D) PROBLEMAS DE APLICACIÓN

49. Un tanque de metal rectangular sin tapa debe contener 256 m3 de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requieren menos material de construcción?

---

50. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.

Optativos:

Funciones reales de dos variables reales independientes

A) DOMINIO E IMAGEN

1. Determine y , grafique el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(u,v)=\sqrt{\dfrac{v-u}{u+3v}}$

b) $f(x,y)=arc\cos\left(x^2+y\right)$

c) $f(x,y)=+\sqrt{y.senx}$

d) $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}$

B) REPRESENTACIÓN GRÁFICA - TRAZAS, CURVAS DE NIVEL

2. Determine las ecuaciones de las trazas y curvas de nivel de las siguientes funciones, grafique tres curvas de nivel e identifique las superficies:

a) $z=x^2+2$

b) $x^2+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1$

3.- LÍMITE Y CONTINUIDAD

3. Analice los siguientes límites en el origen, ó en los puntos indicados, mediante límites direccionales, reiterados o usando coordenadas polares, a fin de determinar su existencia:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{6xy}{x^2+y^2}$

b) $h(x,y)=\dfrac{(2y-18x^2)}{\sqrt{y}-3x}$ en P(0,0)

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\dfrac{x\,y^3}{x^2+y^6}$ en P0,0)

---

4. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2.y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

4.- DERIVADAS PARCIALES

A) CALCULO APLICANDO REGLAS DE DERIVACION

5. Halle las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

a) $g(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

b) $f(x,y)=4x^3-senx^3+\ln y$ en $P(0,1)$

c) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

d) $f(s,t)=e^{s\ln t}$ en $\mathrm{P}(-1,\mathrm{e})$

B) INTERPRETACION GEOMETRICA

6. Halle los puntos de la superficie $\mathrm{f(x,y)=x^2}-4xy+\mathrm{y}^2$ donde:

a) $\mathrm{f_x}=2$

b) $\mathrm{f_y}=1$

c) $\mathrm{f_x}=2\wedge\mathrm{f_y}=4$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

7. Si la ley de distribución de la temperatura T en un punto (x, y) de una placa está dada por :

$$T=54-\frac{2}{3}x^2-4y^2$$

Obtenga la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia (cm) a lo largo de la placa, en dirección de los ejes x e y respectivamente, en P (3,1).

D) DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR - TEOREMA DE CLAIRAUT - SCHWARZ

8. Demuestre que la función $f(x,\ y) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ es una solución de la ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

---

9. Compruebe que $w = \mathrm{sen}(x + ct)$ satisface la ecuación de onda $w_{t^2} = c^2 w_{x^2}$

E) TEOREMA DE LA APROXIMACION LINEAL – DIFERENCIABILIDAD - DIFERENCIAL TOTAL

10. En la función $z = 5xy - 2y^3$ halle el incremento al pasar de (3,-2) a (3.1,-1,95) y la aproximación lineal en (3,-2).

---

11. Calcule el diferencial de 2º orden de $f(x,\ y) = x^2\ y^2 - xy^4$ en P (2, -1).

---

12. Halle los diferenciales de 2º y 3º orden para la función $f(x,\ y) = e^x + \cos(xy)$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

13. La lata de un refresco tiene 12 centímetros de alto y 3 cm. de radio. El fabricante planea reducir la altura de la lata en 0,2 cm. y el radio en 0,3 cm. Utilizando diferencial estime cuánta bebida menos encontrarán los consumidores en cada nueva lata.

---

14. Indique un rectángulo con centro de simetría en (1,1) donde la función $f(x, y) = x^2\ y^2$ no varíe más de 0,1; si un par de lados es el doble de los otros dos.

---

5. - DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA - REGLA DE LA CADENA – DIFERENCIACION IMPLICITA - DERIVADA DIRECCIONAL – VECTOR GRADIENTE

C) DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

15. Si $f(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función diferenciable de x, calcule $\frac{dy}{dx}$

a) $y = \mathrm{sen}\ xy$ b) $(x + y)^{2/3} = xy$

---

16. Suponga que la ecuación $z^3+z^2y+7x^2y^2z+c=0$ define a z =z(x,y). Halle el valor de la constante c para el cual f(1,1)=2 y calcule las derivadas parciales en el punto (1,1).

D) PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE (ecuación de la superficie dada en forma implícita)

17. Calcule las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal en el punto (-2 , 1, -3) del elipsoide $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=3$

E) DERIVADA DIRECCIONAL – GRADIENTE

18. En la función dada en forma implícita por $x+z+(2y-z)^2=8$, halle la derivada direccional de z en $\mathrm{A}(8{,}0)$ (considere z = -1), en la dirección que une dicho punto con $\mathrm{B}(11{,}\text{-}4)$

---

19. Utilice las derivadas parciales de la función $f(x,y)=3x^2-2yx$ en el punto $\mathrm{P}(1{,}0)$ para determinar la variación de la función:

a) En la dirección que va de P a Q(4,0), a R(1,3) y a S(4,4). Grafique los tres vectores y redacte una conclusión
b) En la dirección del vector $\mathrm{v}\langle 2{,}6\rangle$
c) ¿en qué dirección la función tiene la máxima razón de cambio en el punto P y cuál es su valor?
d) Grafique la curva de nivel que pasa por P y el vector gradiente.

---

20. Si $f(x,y,z)=xsen(yz)$, obtenga el $\nabla f(x,y,z)$, calcule la derivada direccional en $\mathrm{Q}(1{,}3{,}0)$ en la dirección del vector $\bar{v}=\langle 1{,}2{,}\text{-}1\rangle$ y analice en qué dirección tiene la máxima razón de cambio y cuál es su valor, para el mismo punto Q.

---

6. – EXTREMOS DE FUNCIONES LIBRES Y CONDICIONADOS

A) SERIE DE TAYLOR

21. Calcule los valores aproximados de la función $z=e^{2x-y}$ en el punto (1.1, 2.01) trabajando con los polinomios de Taylor de 1º, 2º y 3º grado. Compare los resultados con el verdadero valor de la función en el punto.

B) EXTREMOS LIBRES

22. Encuentre para la siguiente función los puntos donde las derivadas primeras se anulan $\mathrm{z}=\mathrm{x}^4+\mathrm{y}^3-3\mathrm{y}$

---

23. Determine, si existen, los puntos críticos de $z = f(x, y)$ teniendo en cuenta que:

$f_x = 9x^2 - 9$ y $f_y = 2y + 4$

---

24. Encuentre y clasifique los extremos relativos de las funciones y calcule el valor de la función en dichos puntos

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$

b) $t(x,y) = \dfrac{-x-y}{x^2 + y^2 + 3}$

c) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

d) $f(x,y) = e^x \cos y$

C) EXTREMOS CONDICIONADOS - MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

25. Utilice el Método de los Multiplicadores de Lagrange para hallar los puntos críticos de la función, sujeta a la restricción dada:

a) $\begin{cases} f(x,y) = xy \\ 9x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x;y;z) = x^2 y^2 z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

---

26. Halle los extremos de $f(x,y) = 3y + 4x$ sujeta a la condición de $(x-1)^2 + y^2 = 25$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

27. Encuentre el punto del plano de ecuación $x + 2y + 3z = 4$ que se halla más cerca del origen de coordenadas

---